Gaussova kvadratura: Chci najít $\{x_i\}_{i=0}^n$, $\{w_i\}_{i=0}^n$ tak, aby
$Q(f) = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$ měla co nejvyšší řád.

- Celkově $2(n+1)$ neznámých, možný řád $2n+1$.
- Pro jednoduchost $[-1,1]$.

Př: $n=1$: $\int_{-1}^1 f(x)\,dx \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$, chci, aby přesné pro $f = 1, x, x^2, x^3$

$\Rightarrow$ soustava rovnic (nelineární)

Vyjde $Q(f) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Věta: Nechť $\{x_i\}_{i=0}^n$ jsou kořeny Legendrova polynomu $\mathcal{L}_{n+1}$ (tj. $\int_{-1}^1 \mathcal{L}_{n+1}(x) p_n(x)\,dx = 0$ $\forall p_n \in P_n$). Pak příslušná Q je řádu $2n+1$.

Dk: • Nechť $p \in P_{2n+1}$, chci $Q(p) = I(p)$.

• $p/\mathcal{L}_{n+1}$ se zbytkem: $p(x) = \mathcal{L}_{n+1}(x) p_n(x) + r_n(x)$, $p_n, r_n \in P_n$.

• $I(p) = \int_{-1}^1 p(x)\,dx = \underbrace{\int_{-1}^1 \mathcal{L}_{n+1} p_n\,dx}_{=0} + \int_{-1}^1 r_n\,dx =$

$= Q(r_n) = \sum_{i=0}^n w_i \underbrace{r_n(x_i)} = \sum_{i=0}^n w_i p(x_i) = Q(p)$ — Q vždy integruje přesně alespoň P_n

$p(x_i) = \underbrace{\mathcal{L}_{n+1}(x_i)}_{=0} p_n(x_i) + r_n(x_i) = r_n(x_i)$.

Př: $n=1$, $\mathcal{L}_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1) = 0 \iff x_{0,1} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ - jako výše.

Pozn: Neexistují vzorce pro vyšší Gaussovy kvadratury. ($\exists$ řady).

Věta (odhad chyby - obecný interval): $f \in C^{2n+2}[a,b]$. Pak Gaussova kvadratura splňuje: $|I(f) - Q(f)| \le \frac{1}{(2n+2)!}(b-a)^{2n+3} \max_{x\in[a,b]} |f^{(2n+2)}(x)|$.

Dk: • K uzlům $x_0 \dots x_n$ přidám libovolné další $x_{n+1}, \dots, x_{2n+1} \in (a,b)$ - různé.

• L_n … Lagrangeova interp. f-ce n na $x_0, \dots, x_n$

L_{2n+1} … —— " —— $2n+1$ na $x_0 \dots x_{2n+1}$

Pak $Q(f) := \int_a^b L_n\,dx = \int_a^b L_{2n+1}\,dx$

Dk: $L_n(x_i) = L_{2n+1}(x_i) = f(x_i) \quad \forall i = 0, \dots, n$

$\Rightarrow L_n - L_{2n+1}$ má kořeny $x_0, \dots, x_n$

$$\Rightarrow L_n(x) - L_{2n+1}(x) = \underbrace{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}_{= q_{n+1}(x)} p_n(x), \quad p_n \in P_n$$

$$\Rightarrow \int_a^b L_n - L_{2n+1}\, dx = \int_a^b q_{n+1}(x) p_n(x)\, dx = \underline{0}, \quad q_{n+1} \perp P_n$$

- $$|I(f) - Q(f)| = \left| \int_a^b f - L_{2n+1}\, dx \right|$$

"$\int L_n = \int L_{2n+1}$"

$$|\cdot| \le \frac{?}{(2n+2)!} \underbrace{\left| \prod_{i=0}^{2n+1} (x-x_i) \right|}_{\le (b-a)^{2n+2}} \max |f^{(2n+2)}|.$$

Pozn: Pro Gausse: $w_i > 0 \ \forall i \qquad I(1) = Q(1): \ b-a = \sum_{i=0}^n |w_i|$

Pro Newton-Cotes $\sum_{i=0}^n |w_i| \to \infty$ pro $n \to \infty$

Pozn: Clenshaw-Curtisova kvadratura: $\{x_i\}_{i=0}^n$ = Čebyšev.

Řád je n, ale chyba Lagrange je optimální. Pro x_i explicitní vzorce.

Skoro stejně dobré jako Gauss.

Pro $n=1$ vyjde $Q(f) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ na $[-1,1]$.

Složené kvadraturní vzorce: Interpolace nemusí fungovat pro $n \to \infty$ (Runge).

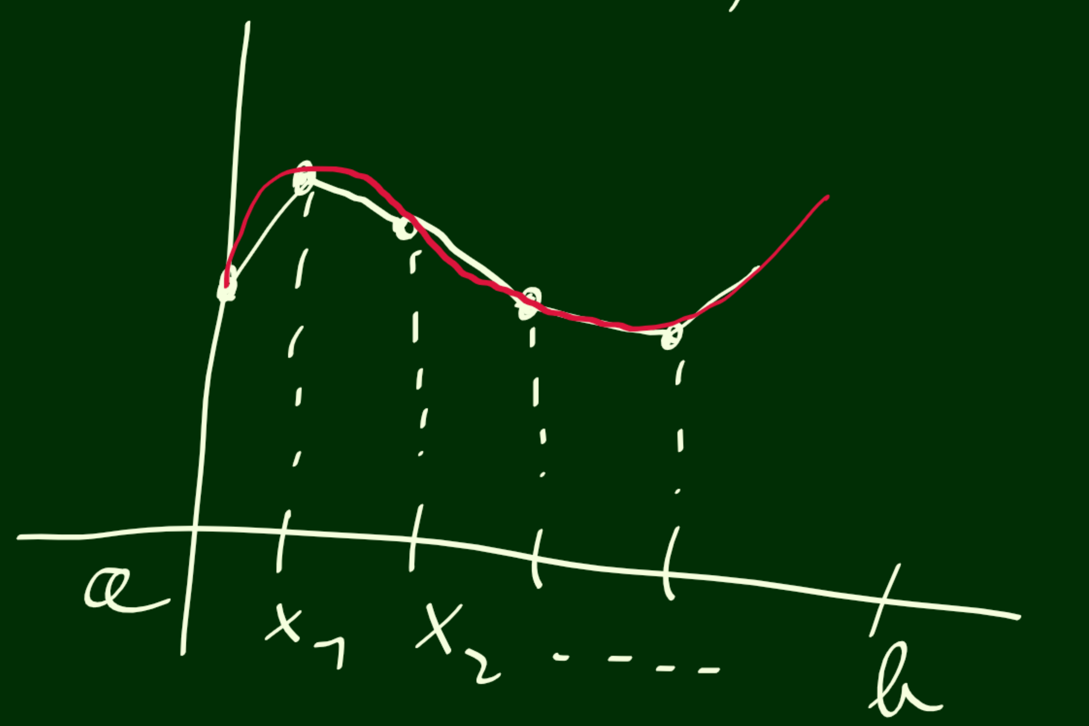
Dělení: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ – rovnoměrné dělení: krok $h = \frac{b-a}{m}$

$x_i = a + ih$.

Pak $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx}$ → a pro ně oblíbenou kvadraturou $Q_{[x_{i-1},x_i]}(f)$

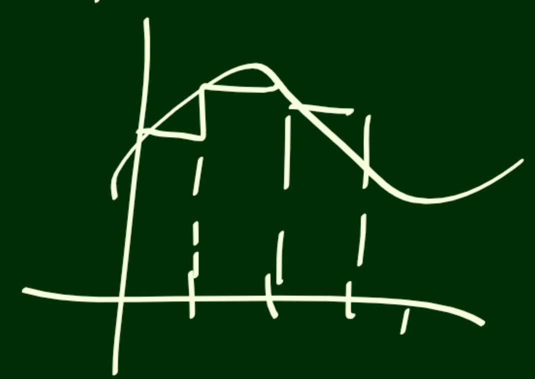
Př: Složené lichoběžníkové pravidlo: $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f\,dx \approx \frac{1}{2} h \left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \approx h\left[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{i=1}^{m-1} f(a+ih) + \frac{1}{2}f(b)\right]$$



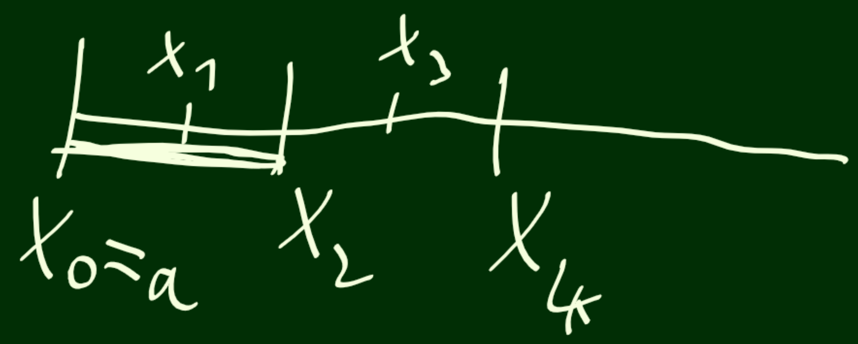
Př: Složené obdélníkové p. =

= Riemannův integrál



Př: Složené Simpsonovo pravidlo: dělení s krokem $2h$

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f\,dx \approx \frac{2h}{6}\left[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\right]$$



$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 4f(x_{m-1}) + f(b)\right]$$

1 4 2 4 2 4 2 .... 4 1

Věta (Chyba slož. lichob. p.): Q = slož. lich. p., pak

$$|I(f) - Q(f)| \le \frac{1}{12} h^2 \max_{[a,b]} |f''| \cdot (b-a)$$

Dk: chyba na $[x_{i-1}, x_i] \le \frac{1}{12}(x_i - x_{i-1})^3 \max_{[x_{i-1},x_i]} |f''|$

Pak $|I(f) - Q(f)| = \left|\sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} f\,dx - Q_{[x_{i-1},x_i]}(f)\right]}_{\le \dots}\right| \le$

$$\le \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{12} h^3 \max_{[x_{i-1},x_i]} |f''| \le \frac{1}{12} \max_{[a,b]} |f''|\, h^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{m} h}_{b-a}$$

Pozn: • 2x víc intervalů ⇒ čekám 4x menší chybu

• obecně Q řád N ⇒ $|I(f) - Q(f)| \le \frac{b-a}{(N+1)!} h^{N+1} \max_{[a,b]} |f^{(N+1)}|$

• Slož. Simps.: $O(h^4)$, tj. 2x víc intervalů ⇒ $2^4 = 16$ x menší chyba.

Metoda polovičního kroku: Doteď apriorní odhad chyby (před výpočtem)

- nevýhoda: neumíme znát konstanty v odhadech, $f^{(N+1)}$

Nyní: aposteriorní odhady chyby (počítám z napočteného výsledku).

Q_h = složené kvadraturní formule s krokem h.

Nechť platí $I(f) - Q_h(f) \approx C h^N$.

- Poloviční krok $h/2$: $I(f) - Q_{\frac{h}{2}}(f) \approx C\left(\frac{h}{2}\right)^N$

odečtu $Q_{\frac{h}{2}}(f) - Q_h(f) \approx C h^N (1 - 2^{-N}) = C\left(\frac{h}{2}\right)^N (2^N - 1)$

$$\Rightarrow \underbrace{I(f) - Q_{\frac{h}{2}}(f) \approx \frac{Q_{\frac{h}{2}}(f) - Q_h(f)}{2^N - 1}}$$ — pravou stranu znám

Nyní odhad vezhora, apř. indikátor.